Projekt A

Magnus Goltermann (xzb187)
Hold 2

10. maj 2022

1 Opgave 1

a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ a & a & 4 & 1 \\ a & 2 & 2a & 1 \end{array}\right]$$

Foretager rækkeoperationen $\frac{-a}{2}r_1 + r_2 \to r_2$ hvor $\frac{-a}{2}r_1 = \left[: -a \quad -a \quad -\frac{1}{2}a \quad \middle| \quad \frac{-a^2}{2}\right]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ a & a & 4 & 1 \\ a & 2 & 2a & 1 \end{array}\right] \frac{-a}{2}r_1 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ a & 2 & 2a & 1 \end{array}\right]$$

Foretager rækkeoperationen $-\frac{a}{2}r_1 + r_3 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ a & 2 & 2a & 1 \end{array}\right] - \frac{a}{2}r_1 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ 0 & 2-a & \frac{3}{2}a & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right]$$

Foretager rækkeoperationen $r_2 \leftrightarrow r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ 0 & 2-a & \frac{3}{2}a & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right] r_2 \leftrightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 2-a & \frac{3}{2}a & 1-\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right]$$

Foretager rækkeoperationen $\frac{1}{2-a}r_2 \to r_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 2-a & \frac{3}{2}a & 1-\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right] \frac{1}{2-a}r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{3a}{4-2a} & \frac{1}{2-a}-\frac{a^2}{4-2a} \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right]$$

Foretager rækkeoperationen $\frac{2}{8-a}r_3 \to r_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{3a}{4-2a} & \frac{1}{2-a}-\frac{a^2}{4-2a} \\ 0 & 0 & 4-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \end{array}\right] \frac{2}{8-a}r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{3a}{4-2a} & \frac{1}{2-a}-\frac{a^2}{4-2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-a^2}{8-a} \end{array}\right]$$

Foretager rækkeoperationen $-\frac{3a}{4-2a}r_3 + r_2 \to r_2$, hvor
$-\frac{3a}{4-2a}r_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -\frac{3a}{4-2a} & (\frac{2-a^2}{8-a})(-\frac{3a}{4-2a}) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -\frac{3a}{4-2a} & \frac{-6a+3a^3}{32-20a+2a^2} \end{array}\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{3a}{4-2a} & \frac{1}{2-a}-\frac{a^2}{4-2a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-a^2}{8-a} \end{array}\right] - \frac{3a}{4-2a}r_3 + r_2 \to r_2$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & (\frac{1}{2-a}-\frac{a^2}{4-2a})(\frac{-6a+3a^3}{32-20a+2a^2}) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-a^2}{8-a} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{64-64a-16a^2+32a^3-8a^4}{128-144+48a^2-4a^3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-a^2}{8-a} \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2(a^2-2)}{a-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-a^2}{8-a} \end{array}\right]$$

b

Når $a = 8$, vil matricen til ligningssytemmet se således ud:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ a & a & 4 & 1 \\ a & 2 & 2a & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 8 & 4 & 1 \\ 8 & 2 & 16 & 1 \end{array}\right]$$

Foretager rækkeoperationer, for at få matricen på echelonform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 8 & 4 & 1 \\ 8 & 2 & 16 & 1 \end{array}\right] - 4r_1 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \\ 8 & 2 & 16 & 1 \end{array}\right]$$

Her ses det allerede, at r_2 er en nulrække med -31 som resultat, hvilket ikke kan lade sig gøre, derfor findes der ikke en løsning på ligingssystemmet.

c

Når $a = 2$, vil matricen til ligningssytemmet se således ud:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & a \\ a & a & 4 & 1 \\ a & 2 & 2a & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Foretager rækkeoperationer, for at få matricen på echelonform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] - r_1 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$-r_1 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right] - r_2 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{3}r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{2}r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{2}r_2 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ligningssystemmet vil have uendelige løsninger ($x_2 = t$):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Totalmatricen i (1) kan ikke bruges til at finde eventuelle løsninger, da rækkeoperationen $\frac{1}{2-a}r_2 \to r_2$ er foretaget for at få den, og når $a = 2$ er den rækkeoperation "ulovlig"(grundet $2 - 2 = 0$ i nævneren).

d

Sætter $a = 0$ og benytter Computation metoden til at finde den inverse matrix til koefficientmatricen A:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] r_2 \leftrightarrow r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{2}r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{4}r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{2}r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] - \frac{1}{2}r_3 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]$$

$$-r_2 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Dvs. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$.

Herefter bestemmes $A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{8} - 1 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Opgave 2

a

E_1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3r_1 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

E_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_4:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} 5r_3 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Rækkefølgen af elementær matricerne skal ifølge Theorem 2.7 være $\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$. Fx hvis rækkeoperationerne ero_1 og ero_2 bruges på en given matrice B, så kan tilhørende elementær matricer ganges på således:

$$A \xrightarrow{ero_1} A' \xrightarrow{ero_2} A''$$

Vil det svare til:

$$A' = E_1A \text{ og } A'' = E_2A' = E_2E_1A$$

Det vides, at matrix multiplikation er associativ, men ikke kommutativ, og derfor kan rækkefølgen af elementær matricerne ikke ændres, og derfor vil dem med rækkefølgen $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{E}_4$ af elementær matricerne være forkerte. Udover dette, så vides det fra *Computation* at den en unik højre invers, og fra *Theorem 2.4* at en kvadratisk unik højre invers også er en venstre invers, og deraf må $\mathbf{A}\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ og $\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}$ være korrekte og give enhedsmatricen..

b

$\mathbf{E_1^{-1}}$:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} 3r_1 + 3_2 \to r_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{E_2^{-1}}$:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} -\frac{1}{3}r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{E_3^{-1}}$:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{E_4^{-1}}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 5r_3 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det vides, at A kan bestemmes ved at tage produktet af de inverse elementære matricer ovenfor:

$$A = \mathbf{E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1}} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

C

Bestemmer først $\mathbf{E_4 E_3 E_2 E_1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -15 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Da $\mathbf{X}$ består af række to og tre af ovenstående matrice, må $\mathbf{X}$ derfor være:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Vis $\mathbf{X}$ er venstre-invers til $\mathbf{B}$, så må $\mathbf{XB} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{XB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da er **X** venstre-invers.
For at bestemme alle venstre-inverser til **B** skal en matrix findes, som ganget på **B** til venstre for giver enhedsmatricen:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Produktet af de to matricer giver følgende matrice:

$$\begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 & -5x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_4 + 3x_5 & -5x_5 - \frac{1}{3}x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ud fra ligningssystemmet ovenfor, kan en totalmatrice opstilles for at løse systemet:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] -\frac{1}{5}r_2 \to r_2 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] -\frac{1}{5}r_4 \to r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & \frac{-1}{5} \end{array}\right]$$

$$-3r_2 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & \frac{-1}{5} \end{array}\right] - 3r_4 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Det ses, at der er 2 frie variable angivet som $x_3 = t$ og $x_6 = k$ og da kan alle de venstre inverser angives som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} \\ 1 \end{bmatrix}$$

For at bestemme om matricen også har en højre invers, kan theorem 2.10 (s. 89) benyttes. Først bringes $\mathbf{B}$ på reduceret echelonform for at bestemme rank:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} -3r_1 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} -5r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3} r_2 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det ses, at ranken af matricen er 2, og ifølge Theorem 2.10 har matricen kun en højre invers hvis rank er lig med antal rækker. Det ses at $2 \neq 3$, og derfor har matricen $\mathbf{B}$ ikke en højre invers.

Opgave 3

a

Nabomatricen $\mathbf{N}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For at bestemme antal veje fra knude 4 til knude 1 af længden 5 ganges nabomatricen med $\mathbf{N}^4$, men da det blot er vejene fra knude 4 til 1, kan der blot nøjes med at udregne række 4 søjle 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 9 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$7 + 4 + 2 + 4 = 17$$

Dvs. der er 17 veje med længden 5 fra knude 4 til knude 1.

b

Linksmatricen kan bestemmes ved først at normalisere rækkerne, og herefter transponere matricen:
Normalisering:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transponerer den normaliserede nabomatrice, for at bestemme linksmatrice og indsætter -1 på diagonalen :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

c

Først omskrives systems til $Ax - x = 0$ og opskriver den tilsvarende matrice:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Herefter kan systemet løses ved at få ovenstående matrice på reduceret echelonform:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$r_1 \cdot -1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$r_2 \cdot -1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{2}r_1 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{4}r_1 + r_4 \to r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{2}r_2 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{2}r_2 + r_5 \to r_5 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$r_3 \cdot -2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{2}r_3 + r_4 \to r_4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$r_4 + r_5 \to r_5 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$r_4 \cdot -\frac{8}{3} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$r_4 + r_3 \to r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{4}r_4 + r_2 \to r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{4}r_4 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$r_3 + r_1 \to r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Her ses det, at x_5 er en fri variable og sættes derfor $x_5 = t$, og løsningen kan derfra opskrives som:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{25}{6} \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

På grundlag af dette, kan rangordningen af siderne bestemmes således at side 1 har højest rang, dernæst 3, 4, 5 og så 2, da $\frac{16}{3} > \frac{25}{6} > \frac{8}{3} > 1 > \frac{2}{3}$.